Mathématiques Problème

Option T

Durée : 4 heures

Il est rappelé que l'évaluation de la copie prendra en compte l'orthographe, la syntaxe et la présentation. La décote éventuelle pourra atteindre 10% du barème.

Ce problème traite de quelques notions géométriques en particulier actuellement fondamentales pour l'usinage par des machines à commande numérique.

On désigne par

$\mathbb{R}$ le corps des nombres réels,

$\mathbb{R}[X]$ l'anneau des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$,

$\mathbb{R}(X)$ le corps des fractions rationnelles à coefficients dans $\mathbb{R}$,

$\mathcal{E}$ un plan affine réel, euclidien, orienté, et rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{i},\vec{j})$ noté R_1.

Sauf indication expresse du contraire, toutes les coordonnées envisagées dans ce problème sont relatives à R_1.

On identifie les polynômes et les fonctions polynômes, les fractions rationnelles et les fonctions rationnelles.

Les accents ' et " désignent respectivement la dérivée première et seconde de la fonction sur laquelle ils portent.

Si l'on se donne I un intervalle de $\mathbb{R}$, δ un réel non nul, et (C) une courbe paramétrée de $\mathcal{E}$, de classe C^1, sans point singulier, définie sur I par

$$t \mapsto M(t) \text{ tel que } \overrightarrow{OM}(t) = x(t)\,\vec{i} + y(t)\,\vec{j},$$

on appelle parallèle à (C) relativement à δ, et on note $\mathcal{P}((C),\delta)$, l'ensemble des points P(t) définis par $\overrightarrow{OP}(t) = \overrightarrow{OM}(t) + \delta\,\vec{n}(t)$, avec $\vec{n}(t) = \dfrac{-y'(t)}{\left(x'^2(t)+y'^2(t)\right)^{1/2}}\vec{i} + \dfrac{x'(t)}{\left(x'^2(t)+y'^2(t)\right)^{1/2}}\vec{j}$.

PARTIE 1

p étant un nombre réel donné, strictement positif, soit (Γ) la parabole d'équation

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = \dfrac{t^2}{2p} \end{cases}$$

où t parcourt $\mathbb{R}$.

1.1: Donner une représentation paramétrique de la développée $\mathcal{D}$ de (Γ).
Etudier et représenter graphiquement $\mathcal{D}$.

1.2: Donner une représentation paramétrique de la parallèle $\mathcal{P}(\Gamma,\delta)$.

1.3: Pour quelles valeurs de δ la courbe $\mathcal{P}(\Gamma,\delta)$ possède-t-elle des points singuliers ?
Déterminer l'ensemble $\mathcal{S}$ de ces points singuliers lorsque δ varie.
Comparer $\mathcal{S}$ et $\mathcal{D}$.

PARTIE 2

Il n'est pas indispensable d'avoir répondu à la question 2.2 pour traiter la suite de cette partie.

Soit (C) une courbe donnée de $\mathcal{E}$, de classe C^3, sans point singulier et de représentation paramétrique $t \mapsto x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$.
En tout point M(t) de (C), on considère la droite $D(M(t))$, passant par M(t), et symétrique, par rapport à la normale à (C) en M(t), de la droite passant par M(t) et de vecteur directeur $\vec{i}$.
On appelle caustique de (C), et on note $\mathcal{C}(C)$ l'enveloppe, lorsqu'elle existe, de la famille des droites $D(M(t))$ pour M(t) parcourant (C).

2.1: Former l'équation cartésienne de $D(M(t))$.

2.2: Etablir une représentation paramétrique $t \mapsto X(t)\vec{i} + Y(t)\vec{j}$ de la caustique $\mathcal{C}(C)$ en calculant $X(t)-x(t)$ et $Y(t)-y(t)$ sous la forme

$$\begin{cases} X(t) - x(t) = \dfrac{y'(t)}{2Q(t)} P_x(t) \\ Y(t) - y(t) = \dfrac{y'(t)}{2Q(t)} P_y(t) \end{cases}$$

$$\text{où } Q(t) = x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)$$
$$P_x(t) = a\,x'^2(t) + b\,y'^2(t)$$
$$P_y(t) = c\,x'(t)y'(t)$$

avec a,b,c constantes à déterminer.

2.3: Montrer que $\begin{cases} X'(t) = k(t)\left(x'^2(t) - y'^2(t)\right) \\ Y'(t) = 2k(t)\, x'(t) y'(t) \end{cases}$

où k est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (on pourra considérer le tangente à $\mathcal{C}(C)$).

2.4: On considère à nouveau la parabole (Γ) définie dans la partie 1.

2.4.1 Donner une représentation paramétrique de la caustique $\mathcal{C}(\Gamma)$.

2.4.2 Soient F le point de coordonnées $\left(0, \frac{p}{2}\right)$ dans R_1, et $\left(F; \vec{j}, -\vec{i}\right)$ le repère R_2.

On note (ξ, η) les coordonnées dans R_2 du point générique de $\mathcal{C}(\Gamma)$.

Calculer $27p\left(\xi^2 + \eta^2\right) - 2\left(\xi + 2p\right)^3$.

2.4.3 On prend le point F comme pôle et l'axe $\left(F; \vec{j}\right)$ comme axe polaire, et on pose $\begin{cases} \xi = r(\theta)\cos\theta \\ \eta = r(\theta)\sin\theta \end{cases}$

Vérifier qu'il existe une constante négative e, à exprimer en fonction de p, telle qu'une équation polaire de $\mathcal{C}(\Gamma)$ soit $r(\theta) = \dfrac{e}{\cos^3 \dfrac{\theta}{3}}$.

2.4.4 Etudier les branches infinies de cette courbe.

PARTIE 3

On dit qu'une courbe est rationnelle s'il en existe une représentation paramétrique rationnelle, c'est à dire de la forme

$$t \mapsto M(t) \text{ tel que } \overrightarrow{OM}(t) = x(t)\,\vec{i} + y(t)\,\vec{j}$$

où x et y sont des éléments de $\mathbb{R}(X)$.

3.1: La propriété, pour une courbe, d'être rationnelle, dépend-elle du repère dans lequel on a cette représentation ?

3.2: Les coniques, éventuellement privées d'un point, sont-elles des courbes rationnelles ?

3.3: Dans un but de normalisation, il est intéressant de considérer le problème suivant :

soit ici $I =]0,1[$;

trouver un élément f de $\mathbb{R}(X)$ dont la restriction à I réalise une bijection croissante de I sur $\mathbb{R}$.

Existe-t-il un élément de $\mathbb{R}(X)$ qui définisse une bijection de $\mathbb{R}$ sur I ?

Peut-on trouver, pour une ellipse, une représentation paramétrique rationnelle définie sur l'intervalle $]0,1[$?

3.4: La caustique $\mathcal{C}(C)$ d'une courbe rationnelle (C) est-elle rationnelle ?

3.5: Les parallèles aux caustiques des courbes rationnelles sont-elles rationnelles ?